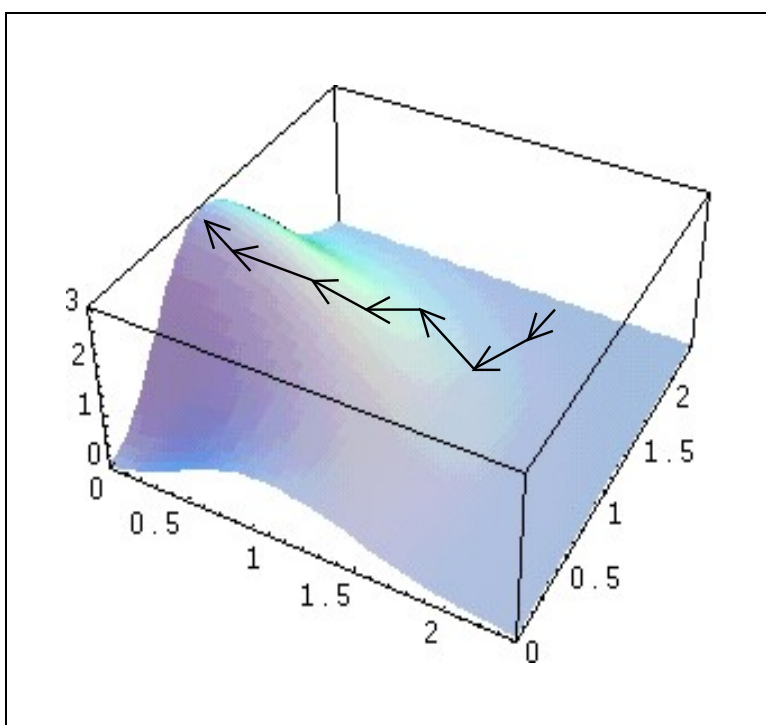


# FLUJO DE POTENCIA OPTIMO ESPECIALIZADO PARA SISTEMAS RADIALES



**MAURICIO GRANADA E.**  
Ingeniero Electricista, M.Sc  
Docente F.I.E.  
Universidad Tecnológica de  
Pereira  
[magra@utp.edu.co](mailto:magra@utp.edu.co)

**RAMÓN A. GALLEGO R.**  
Ingeniero Electricista, Ph.D.  
Docente F.I.E.  
Universidad Tecnológica de  
Pereira  
[ragr@utp.edu.co](mailto:ragr@utp.edu.co)

*Grupo de Investigación en  
Planeamiento de Sistemas  
Eléctricos*

## RESUMEN

En este artículo se resuelve el problema de flujo de potencia óptimo para sistemas radiales de distribución usando un flujo de potencia especializado.

## PALABRAS CLAVES

Sistemas Radiales, Flujo de Potencia Óptimo, Método de la cadena.

## ABSTRACT

In this article the optimal power flow problem for distribution radial systems is solved using a specialized power flow.

## KEYWORDS

Radial systems, Optimal Power Flow, Chain Method.

## 1. INTRODUCCIÓN

El Flujo de Potencia tradicional que utiliza el método de Newton-Raphson para encontrar el punto de operación de un sistema eléctrico de potencia está en capacidad de resolver topologías tanto radiales como enmalladas.

Sin embargo, a medida que la componente de radialidad del sistema sea mayor, el método de Newton se hace más ineficiente debido a que se conforman matrices Jacobianas altamente dispersas en cada iteración del proceso.

Los alimentadores primarios de los sistemas de distribución generalmente son operados con una distribución topológica radial. El estudio de estos sistemas incluye diversos problemas encaminados, generalmente, a la reducción de pérdidas y optimización de recursos.

Entre los problemas más estudiados de los sistemas de distribución se encuentran: el planeamiento, la reconfiguración, la colocación óptima de capacitores y el mejoramiento del perfil de tensión, entre otros. Todos estos estudios requieren de una herramienta común de análisis como lo es el flujo de potencia para sistemas de gran tamaño y con configuración radial (FP). Por tal razón, se propone utilizar el método desarrollado por Mesut E. Baran y Felix E. Wu [1], el cual aborda esta problemática. Este método maneja, implícitamente, una técnica de ordenamiento que no genera dispersidad durante el proceso de inversión de la Jacobiana. Es decir, no aparecen elementos de relleno al invertir dicha matriz, siendo ésta característica a la que se le trata de sacar el mayor provecho [2].

En este documento, se utiliza el FP descrito anteriormente para abordar el problema de reducción de pérdidas en sistemas radiales de distribución. Este problema es tratado como un flujo de potencia óptimo (FPO) cuyos parámetros de control son los voltajes nodales. Por lo tanto, el FP será el encargado de verificar, en cada iteración del FPO, el cumplimiento del balance de potencias o punto de operación del sistema.

## 2. FLUJO DE CARGA RADIAL

Las principales características de este método consisten en que utiliza la disposición radial de la red, calcula el vector de variables de estado ( $Z$ ) en nodos adyacentes y utiliza la subestación como punto de partida debido a que allí las variables de estado son conocidas. Lo anterior quiere decir que si  $Z$  es conocido en un nodo  $k$ , entonces  $Z$  puede ser calculado en un nodo adyacente  $k+1$ . De esta manera, se puede efectuar un procedimiento iterativo que se desplace sobre el sistema eléctrico calculando  $Z$  en cada nodo. Adicionalmente, se debe tener en cuenta que la potencia activa y

reactiva que inyecta la subestación al sistema es conocida y por tal razón, en este método, estos dos parámetros son escogidos como variables de estado. Así, una vez ordenado el sistema, el proceso de inversión puede efectuarse en función de la disposición topológica de la red.

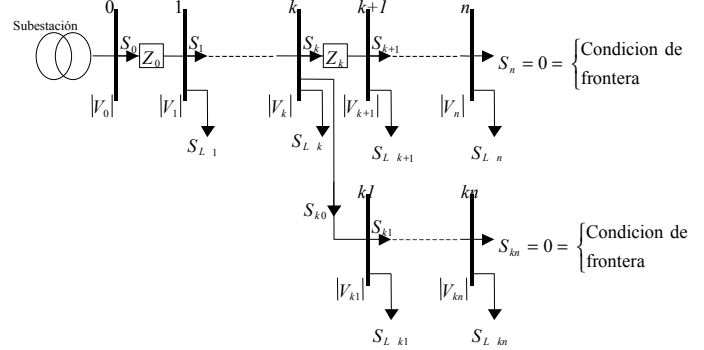


Figura 1. Red de distribución radial. Caso general.

Realizando un balance de potencias [2] en el nodo  $k$  de la red mostrada en la figura 1 se obtienen las expresiones fundamentales que relacionan las potencias de la barra  $k$  con las de la barra  $k+1$ :

$$P_{k+1} = P_k - P_{L_{k+1}} - r_k \frac{(P_k^2 + Q_k^2)}{|V_k|^2} \quad (1)$$

$$Q_{k+1} = Q_k - Q_{L_{k+1}} - x_k \frac{(P_k^2 + Q_k^2)}{|V_k|^2} \quad (2)$$

$$|V_{k+1}|^2 = |V_k|^2 - 2(r_{k+1}P_k + X_{k+1}Q_k) + \frac{(r_{k+1}^2 + jx_{k+1}^2)(P_k^2 - jQ_k^2)}{|V_k|^2} \quad (3)$$

El problema en su forma más general consiste en tener una red con un alimentador principal y  $r$  alimentadores primarios como se ilustra en la figura 1. Por facilidad, es conveniente estudiar en primera instancia únicamente el alimentador principal y posteriormente expandir la metodología al caso general.

Para el alimentador principal se define el vector de variables de estado, en la subestación, así:

$$Z_{00} = \begin{bmatrix} P_{00} \\ Q_{00} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Primer subíndice      Segundo subíndice

Donde el primer subíndice indica el nodo origen del alimentador y el segundo indica el nodo que se está evaluando.

Por otra parte, es evidente que en el último nodo del alimentador la potencia inyectada al sistema debe ser cero. Esto se conoce como condición de frontera y se traduce en un criterio de convergencia para el algoritmo. Por lo tanto se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} P_{0n} &= 0 \\ Q_{0n} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

El vector de variables de estado  $Z_{00}$  se corrige a través de un método iterativo (Newton-Raphson) hasta que los valores de potencia activa y reactiva de la expresión (5) sean iguales o muy cercanos a cero. Estos valores son los errores del alimentador principal y se denotan por el vector:

$$H_{00}(Z_{00}) = \begin{bmatrix} P_{0n} \\ Q_{0n} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Este vector se define como el error de potencia en la subestación del ramal principal en función de las variables de estado  $P_{00}$  y  $Q_{00}$ . De esta forma, el sistema está completamente definido con dos ecuaciones, expresiones (1) y (2) y dos incógnitas, expresión (4), lo cual permite aplicar el método iterativo de Newton-Raphson. Como es bien conocido, aplicar este método implica expandir en series de Taylor y linealizar descartando los términos de grado mayor o igual a 2. Resolver el sistema resultante involucra el cálculo de una matriz Jacobiana y su inversa. En este caso, el interés fundamental es evaluar el impacto o sensibilidad sobre el nodo terminal debido a cambios en el nodo Slack. Como no es posible obtener de forma directa esta relación debido a que las expresiones con que se cuenta sólo consideran nodos adyacentes, es necesario aplicar la regla de la cadena de la siguiente manera:

$$[J] = \left[ \frac{\partial X_{0n}}{\partial X_{00}} \right] = \left[ \frac{\partial X_{0,n}}{\partial X_{0,n-1}} \right] \left[ \frac{\partial X_{0,n-1}}{\partial X_{0,n-2}} \right] \dots \left[ \frac{\partial X_{0,k}}{\partial X_{0,k-1}} \right] \dots \left[ \frac{\partial X_{0,1}}{\partial X_{0,0}} \right] \quad (7)$$

En la figura 2 se ilustra el funcionamiento de la regla de la cadena en un sistema radial de un único alimentador.

En el caso más general, para cada ramal  $k=1,2,\dots,r$ , se debe especificar dos nuevas variables de estado  $P_{k0}$  y  $Q_{k0}$ , así como dos nuevas condiciones de frontera  $P_{kn}=0$  y  $Q_{kn}=0$ .

El nuevo sistema a resolver es de la forma:

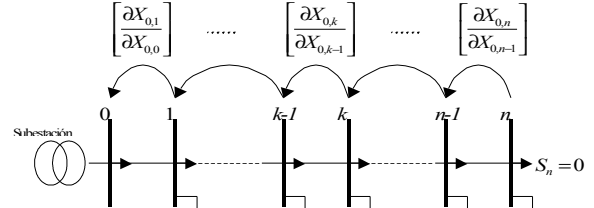


Figura 2. Funcionamiento de la regla de la cadena en un sistema radial con un alimentador

$$\begin{aligned} P_{0n}(z_{10}, z_{20}, \dots, z_{k0}, z_{00}) &= 0 \\ Q_{0n}(z_{10}, z_{20}, \dots, z_{k0}, z_{00}) &= 0 \\ P_{kn}(z_{10}, z_{20}, \dots, z_{k0}, z_{00}) &= 0 \\ Q_{kn}(z_{10}, z_{20}, \dots, z_{k0}, z_{00}) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Se genera una matriz Jacobiana para el principal así como para cada uno de los laterales primarios, es decir, se generan  $(r+1) \times (r+1)$  Jacobianas. Estas matrices se ordenan en un arreglo matricial  $[J]$  como se muestra a continuación:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & & & J_{10} \\ J_{21} & J_{22} & & J_{20} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ J_{r1} & J_{r2} & & J_{rr} & J_{r0} \\ J_{01} & J_{02} & & J_{0r} & J_{00} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Donde cada matriz  $[J_k]$  asume la siguiente forma:

$$[J_{ik}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{in}}{\partial P_{k0}} & \frac{\partial P_{in}}{\partial Q_{k0}} \\ \frac{\partial Q_{in}}{\partial P_{k0}} & \frac{\partial Q_{in}}{\partial Q_{k0}} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i = \text{lateral} \\ k = \text{barra} \end{array} \quad (10)$$

Es posible configurar una versión simplificada de la matriz Jacobiana:

$$\begin{array}{l} \text{Lateral 1} \dots \dots \dots \\ \text{Lateral 2} \dots \dots \dots \\ \vdots \\ \text{Lateral r} \dots \dots \dots \\ \text{Principal y amarres!} \dots \dots \dots \end{array} \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & J_{rr} & 0 & 0 \\ J_{01} & J_{02} & \vdots & \vdots & J_{0r} & J_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Z_{10} \\ \Delta Z_{20} \\ \vdots \\ \Delta Z_{r0} \\ \Delta Z_{00} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H_1(z) \\ H_2(z) \\ \vdots \\ H_r(z) \\ H_0(z) \end{bmatrix} \quad (11)$$

El sistema total se resuelve de la siguiente manera:

$$J_{kk} \Delta Z_{k0} = H_k(Z) \quad k=1,2,\dots,r \quad (12)$$

$$J_{00} \Delta Z_{00} = H_0(Z) - d^t p_r \quad (13)$$

Donde:

$$d = \begin{bmatrix} J_{01} \\ J_{02} \\ \vdots \\ J_{0r} \end{bmatrix} \quad p_r = \begin{bmatrix} \Delta Z_{10}^t \\ \Delta Z_{20}^t \\ \vdots \\ \Delta Z_{r0}^t \end{bmatrix} \quad H_k = \begin{bmatrix} P_{kn} \\ Q_{kn} \end{bmatrix} \quad (14)$$

La figura 3 ilustra el algoritmo completo del FP radial descrito anteriormente.

### 3. FLUJO DE POTENCIA OPTIMO RADIAL

La diferencia básica entre el algoritmo de optimización usado en sistemas de potencia enmallados y el utilizado en sistemas radiales de distribución radica en el método aplicado a la solución de los muchos flujos de potencia que se deben resolver en cada iteración del FPO.

Para clasificar los diferentes métodos y procedimientos es conveniente decir que la Jacobiana que se construye usando el método tradicional de Newton-Raphson para sistemas de transmisión [5] se denomina "Jacobiana uno" y a la que se construye usando el método de Baran-Wu se denomina "Jacobiana dos".

La *Jacobiana dos* no puede ser usada para el proceso de optimización planteado en este trabajo [3], por lo tanto ésta sólo se utiliza para la solución del FP. Una vez se tienen el punto de operación del sistema se utilizan los valores de los voltajes nodales encontrados para calcular la *Jacobiana uno*. Este simple cambio agiliza considerablemente el proceso de optimización en *sistemas radiales*, debido a que para la solución del FP tanto la *Jacobiana dos* como la *Jacobiana uno* se calculan y se invierten sólo una vez en cada iteración del FPO.

La forma canónica del modelo matemático del FPO es:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x,u) \\ \text{s.a.} \quad & [g(x,u)] = 0 \\ & [u^{\min}] \leq [u] \leq [u^{\max}] \end{aligned} \quad (15)$$

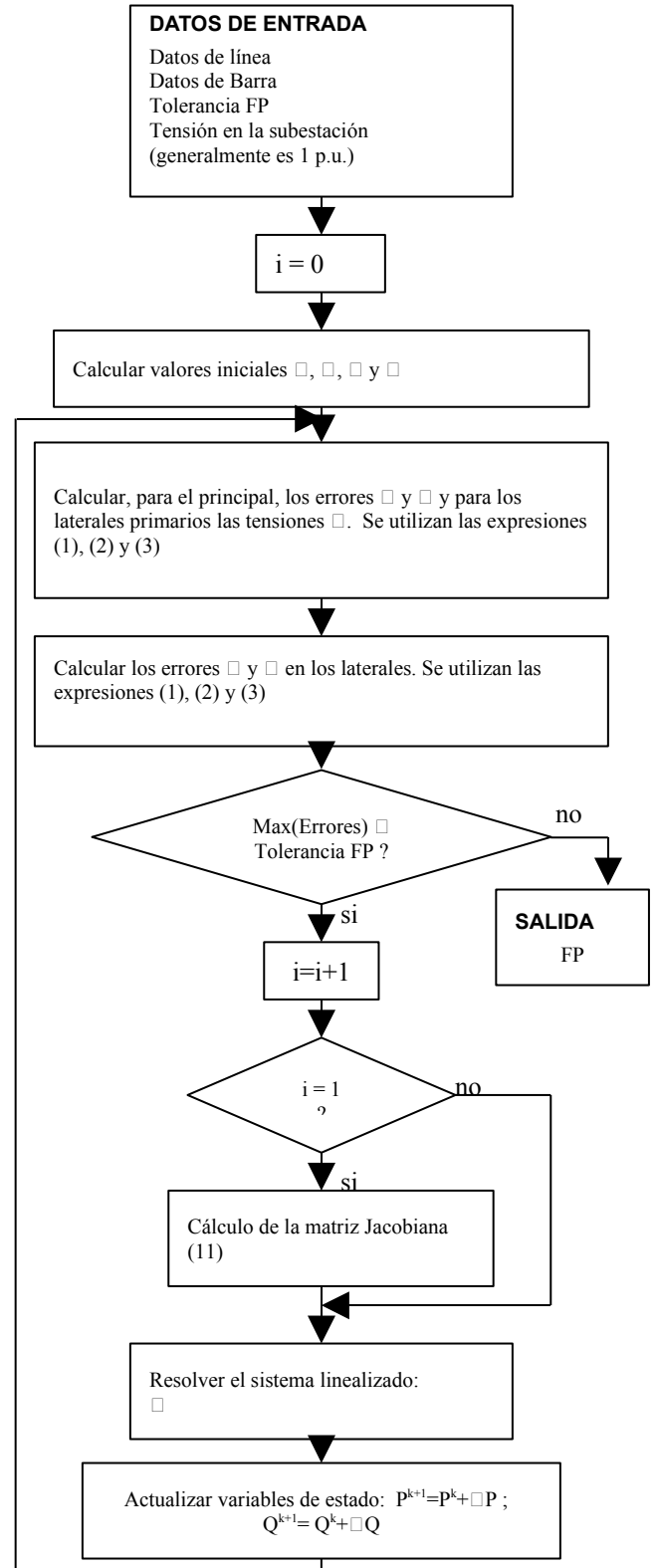


Figura 3. Flujo de potencia radial usando el método de la cadena

Donde  $x$  representa las variables de estado ( $V, \theta$ ) y  $\mu$  los parámetros de control. Desde el punto de vista de los sistemas eléctricos es interesante definir como parámetros de control los voltajes en la subestación.

Una adecuada función objetivo es la potencia activa  $P_i$  (en la subestación) la cual indica que minimizar las perdidas en ese nodo es equivalente a minimizar las pérdidas totales del sistema.

$$f = P_i(V, \theta) \quad (16)$$

Se redefine la función objetivo a través de la función Lagrangeana sin restricciones

$$L(x, u, \lambda) = f(x, u) + [\lambda]^T [g(x, u)] \quad (17)$$

y se calcula el vector gradiente de la función Lagrangeana en un punto mínimo:

$$\nabla L(x, u, \lambda) = 0 \quad (18)$$

De lo anterior surge el conjunto de condiciones necesarias para un mínimo:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial L}{\partial x} \right] &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] + \left[ \frac{\partial g}{\partial x} \right]^T [\lambda] = 0 \\ \left[ \frac{\partial L}{\partial u} \right] &= \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right] + \left[ \frac{\partial g}{\partial u} \right]^T [\lambda] = 0 \\ \left[ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right] &= [g(x, u, p)] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

El sistema (19) se resuelve para encontrar el vector gradiente de la función objetivo:

$$[\nabla f] = \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right] - \left[ \frac{\partial g}{\partial u} \right]^T \left[ \frac{\partial g}{\partial x} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] \quad (20)$$

Con la dirección del gradiente negativo (minimización) y un paso exploratorio  $c$ , se calcula el nuevo valor de los parámetros de control que minimizan la función objetivo en busca de un optimo local de la siguiente forma:

$$u_i^{nuevo} = \begin{cases} u_i^{\max}, & \text{si } u_i^{viejo} + \Delta u_i > u_i^{\max} \\ u_i^{\min}, & \text{si } u_i^{viejo} + \Delta u_i < u_i^{\min} \\ u_i^{viejo} + \Delta u_i, & \text{en los otros casos.} \end{cases} \quad (21)$$

y la dirección factible dada por el vector gradiente es:

$$\nabla f_i = \begin{cases} 0, & \text{si } \nabla f_i < 0 \text{ y } u_i = u_i^{\max} \\ 0, & \text{si } \nabla f_i > 0 \text{ y } u_i = u_i^{\min} \\ -\nabla f_i & \text{en los otros casos} \end{cases} \quad (22)$$

El proceso anterior constituye una iteración del FPO.

#### 4. APLICACIÓN

Se propone resolver el FPO del sistema de 13 barras mostrado en la figura 4 y cuyos datos se relacionan en la tabla 1:

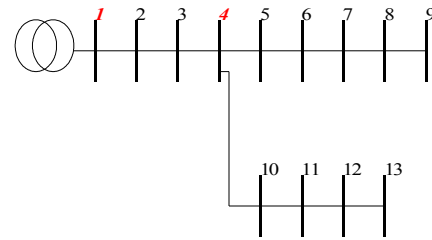


Figura 4. Sistema de distribución radial

La tolerancia del FP es  $1e-6$ .

La tolerancia del FPO es 0.005.

Datos de barra				
Barra	Generación	Demanda	Voltaje	Tipo
1	0+0i	0.000+0.000i	1	Slack
2	0+0i	0.184+0.046i	1	Carga
3	0+0i	0.098+0.034i	1	Carga
4	0+0i	0.179+0.045i	1	Carga
5	0+0i	0.160+0.184i	1	Carga
6	0+0i	0.161+0.060i	1	Carga
7	0+0i	0.078+0.011i	1	Carga
8	0+0i	0.115+0.006i	1	Carga
9	0+0i	0.098+0.013i	1	Carga
10	0+0i	0.164+0.020i	1	Carga
11	0+0i	0.161+0.060i	1	Carga
12	0+0i	0.115+0.006i	1	Carga
13	0+0i	0.098+0.034i	1	Carga

Tabla 1. Datos del sistema

Para la primera iteración del FPO, se obtiene:

$$\text{Jacobiana dos} = \begin{bmatrix} 0.9834 & -0.0052 \\ -0.0144 & 0.9955 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema (12) y (13) se obtiene el vector del incremento de las variables de estado:

$$\Delta Z = \begin{bmatrix} 0.0069 \\ 0.0005 \end{bmatrix}$$

Con este valor se verifica criterio de parada y si no cumple se actualizan las variables de estado y se pasa a la siguiente iteración. Al cabo de 7 iteraciones del FP se obtiene el punto de operación del sistema radial:

$$\text{Volt.[pu]} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.9908 & 0.9837 & 0.9515 & 0.9385 & 0.9168 & \dots \\ 0.9102 & 0.9004 & 0.8896 & 0.8810 & 0.8710 & 0.8600 & 0.8571 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{Ang.[Grad]} = \begin{bmatrix} 0 & -0.6862 & -1.6997 & -3.2592 & -3.3599 & -3.9910 & \dots \\ -3.9457 & -3.9068 & -3.8365 & -4.5973 & -4.6214 & \dots \\ -4.4959 & -3.9493 & & & & & \end{bmatrix}^T$$

Para realizar la primera iteración del FPO se debe calcular la Jacobiana uno. La matriz que se obtiene es de dimensiones 24 x 24 y es bastante dispersa, por la característica radial del sistema. A continuación se calculan algunos elementos de ésta:

$$\begin{bmatrix} J(1,1)=201.9075 & J(2,1)=-85.3844 & J(13,1)=-36.5941 & J(14,1)=3.7592\dots \\ J(1,2)=-85.4639 & J(2,2)=115.5694 & J(3,2)=-29.1854 & J(13,2)=0.7368\dots \\ J(14,2)=-21.3090 & J(15,2)=19.1661 & J(2,3)=-30.1850 & J(3,3)=66.4641\dots \\ J(4,3)=-33.4387 & J(9,3)=-3.4112 & J(14,3)=17.5498 & J(15,3)=-63.7659\dots \\ J(16,3)=38.5184 & J(21,3)=6.3655 & & \end{bmatrix}$$

El vector gradiente es :

$$\nabla f = -0.2862$$

Se actualizan los parámetros de control a través de (21) y (22) y se verifica convergencia, si cumple con el criterio de convergencia se obtienen resultados del FPO, sino, pasa a la segunda iteración.

Se pudo comparar el desempeño de FPO usando tanto el método de Newton como el de la cadena en la solución del FP. La prueba se realizó en un equipo con procesador celeron de 900 Mhz. Se obtuvieron los siguientes resultados:

El sistema sin optimizar tiene pérdidas en pu de  $P=0.110942$  y  $Q=0.161458$ . Después de optimizado por cada uno de los métodos, se obtuvieron los siguientes resultados:

Metodo	Iter. FP	Iter. FPO	T. (seg.)	Perdidas [pu]
Newton	51	12	2.864	0.07086+0.103875i
Cadena	48	9	1.102	0.070859+0.103875i

## 5. CONCLUSIONES

En todos los sistemas de prueba que se estudiaron, la metodología propuesta por Mesut E. Baran y

Felix E. Wu, aplicada a la solución del FPO en sistemas radiales de distribución, disminuyó el esfuerzo computacional y mejoró los tiempos de procesamiento.

Para la solución del FP tanto la *Jacobiana uno* como la *Jacobiana dos* se calculan y se invierten sólo una vez en cada iteración del FPO. Adicionalmente, la *Jacobiana dos* puede permanecer constante durante todo el proceso, lo cual no produce errores significativos en la respuesta, siempre y cuando no cambie la topología del sistema. Esto se debe a que el método de FP funciona con base en la configuración radial de la red.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. E. BARAN, F. F. WU., Optimal sizing of capacitors placed on a radial distribution, IEEE Transaction on Power Delivery, Vol 7, No 3, July 1992.
- [2] GRANADA E. M., Flujo de potencia para sistemas radiales de distribución usando el método de la cadena, SCIENTIA ET TECHNICA, Universidad Tecnológica de Pereira, año VIII, No. 20, Octubre 2002.
- [3] HERMANN W. DOMMEL, WILLIAM F. TINNEY. , Optimal power flow solutions, IEEE Transaction on Power Apparatus and System, October 1968.



### MAURICIO GRANADA

Ingeniero Electricista, M.Sc  
Docente Facultad de Ingeniería Eléctrica  
Universidad Tecnológica de Pereira  
magra@utp.edu.co



### RAMON ALFONSO GALLEGO

Ingeniero Electricista, Ph.D  
Docente Facultad de

Ingeniería Eléctrica  
Universidad Tecnológica de Pereira

ragr@utp.edu.co